CS (Main) Exam, 2020

URC–U–MTH

गणित (प्रश्न-पत्र–I)

समय : तीन घण्टे

अधिकतम अंक : 250

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

(उत्तर देने के पूर्व निम्नलिखित निर्देशों को कृपया सावधानीपूर्वक पढ़ें)

इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो दो खण्डों में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** एवं **अंग्रेजी** दोनों में छपे हैं।

उम्मीदवार को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के लिए नियत अंक उसके सामने दिए गए हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू० सी० ए०) पुस्तिका के मुखपृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्राधिकृत माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए।

MATHEMATICS (PAPER–I)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 250

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

(Please read each of the following instructions carefully before attempting questions)

There are EIGHT questions divided in two Sections and printed both in HINDI and in ENGLISH.

Candidate has to attempt FIVE questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, THREE are to be attempted choosing at least ONE question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड—A / SECTION—A

1. (a) माना समुच्चय V में सभी $n \times n$ के वास्तविक मैजिक वर्ग हैं। दिखाइए कि समुच्चय V, R पर एक सदिश समष्टि है। दो भिन्न-भिन्न 2×2 मैजिक वर्ग के उदाहरण दीजिए।

Consider the set V of all $n \times n$ real magic squares. Show that V is a vector space over R. Give examples of two distinct 2×2 magic squares. 10

(b) माना $M_2(R)$ सभी 2×2 वास्तविक आव्यूहों का सदिश समष्टि है। माना $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$. माना $T: M_2(R) \to M_2(R)$ एक रैखिक रूपांतरण है, जो $T(A) = BA$ द्वारा परिभाषित है। T की कोटि (रैंक) व शून्यता (नलिटि) ज्ञात कीजिए। आव्यूह A ज्ञात कीजिए, जो शून्य आव्यूह को प्रतिचित्रित करता है।

Let $M_2(R)$ be the vector space of all 2×2 real matrices. Let $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$. Suppose $T: M_2(R) \to M_2(R)$ is a linear transformation defined by $T(A) = BA$. Find the rank and nullity of T. Find a matrix A which maps to the null matrix. 10

(c) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$ का मान निकालिए।

Evaluate $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$. 10

(d) वक्र $(2x+3)y = (x-1)^2$ के सभी अनंतस्पर्शी निकालिए।

Find all the asymptotes of the curve $(2x+3)y = (x-1)^2$. 10

(e) दीर्घवृत्तज $2x^2 + 6y^2 + 3z^2 = 27$ के स्पर्श समतल का समीकरण निकालिए, जो रेखा $x - y - z = 0 = x - y + 2z - 9$ से होकर गुजरता है।

Find the equations of the tangent plane to the ellipsoid $2x^2 + 6y^2 + 3z^2 = 27$ which passes through the line $x - y - z = 0 = x - y + 2z - 9$. 10

2. (a) $\int_0^1 \tan^{-1}\left(1 - \frac{1}{x}\right) dx$ का मान निकालिए।

Evaluate $\int_0^1 \tan^{-1}\left(1 - \frac{1}{x}\right) dx$. 15

(b) एक $n \times n$ आव्यूह A को परिभाषित कीजिए, जबकि $A = I - 2u \cdot u^T$, जहाँ u एक इकाई स्तंभ सदिश है।

(i) परीक्षण कीजिए कि A सममित है।

(ii) परीक्षण कीजिए कि A लांबिक है।

(iii) दिखाइए कि आव्यूह A का अनुरेख $(n-2)$ है।

(iv) आव्यूह $A_{3\times 3}$ निकालिए, जबकि $u = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ है।

Define an $n \times n$ matrix as $A = I - 2u \cdot u^T$, where u is a unit column vector.

(i) Examine if A is symmetric.

(ii) Examine if A is orthogonal.

(iii) Show that trace $(A) = n - 2$.

(iv) Find $A_{3\times 3}$, when $u = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$. 20

(c) एक ऐसे बेलन का समीकरण निकालिए, जिसकी जनक-रेखाएँ, रेखा $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ के समांतर हैं तथा जिसका मार्गदर्शक वक्र $x^2 + y^2 = 4,\ z = 2$ है।

Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to the line $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ and whose guiding curve is $x^2 + y^2 = 4,\ z = 2$. 15

3. (a) निम्न फलन पर विचार कीजिए :

$$f(x) = \int_0^x (t^2 - 5t + 4)(t^2 - 5t + 6)\, dt$$

(i) फलन $f(x)$ के क्रांतिक बिंदु निकालिए।

(ii) वे बिंदु निकालिए, जहाँ $f(x)$ का स्थानीय न्यूनतम होगा।

(iii) वे बिंदु निकालिए, जहाँ $f(x)$ का स्थानीय अधिकतम होगा।

(iv) फलन $f(x)$ के $[0,\ 5]$ में कितने शून्यक होंगे, निकालिए।

Consider the function $f(x) = \int_0^x (t^2 - 5t + 4)(t^2 - 5t + 6)\, dt$.

(i) Find the critical points of the function $f(x)$.

(ii) Find the points at which local minimum occurs.

(iii) Find the points at which local maximum occurs.

(iv) Find the number of zeros of the function $f(x)$ in $[0,\ 5]$. 20

(b) माना F सम्मिश्र संख्याओं का एक उपक्षेत्र है व $T: F^3 \rightarrow F^3$ एक ऐसा फलन है, जो निम्न रूप से परिभाषित है :

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 3x_3, 2x_1 - x_2, -3x_1 + x_2 - x_3)$$

a, b, c पर क्या शर्तें हैं कि (a, b, c), T के शून्य समष्टि में है? T की शून्यता निकालिए।

Let F be a subfield of complex numbers and T a function from $F^3 \rightarrow F^3$ defined by $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 3x_3, 2x_1 - x_2, -3x_1 + x_2 - x_3)$. What are the conditions on a, b, c such that (a, b, c) be in the null space of T? Find the nullity of T. 15

(c) यदि सरल रेखा $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ शंकु $5yz - 8zx - 3xy = 0$ के तीन परस्पर लांबिक जनकों के समुच्चय में से एक है, तब अन्य दो जनकों के समीकरण निकालिए।

If the straight line $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ represents one of a set of three mutually perpendicular generators of the cone $5yz - 8zx - 3xy = 0$, then find the equations of the other two generators. 15

4. (a) माना

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{और} \quad B = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(i) AB ज्ञात कीजिए।

(ii) सारणिक (A) व सारणिक (B) ज्ञात कीजिए।

(iii) निम्न रैखिक समीकरणों के निकाय का हल निकालिए :

$$x + 2z = 3, \quad 2x - y + 3z = 3, \quad 4x + y + 8z = 14$$

Let

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(i) Find AB.

(ii) Find $\det(A)$ and $\det(B)$.

(iii) Solve the following system of linear equations :

$$x + 2z = 3, \quad 2x - y + 3z = 3, \quad 4x + y + 8z = 14$$ 15

(b) अतिपरवलयिक परवलयज $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ के लांबिक जनकों के प्रतिच्छेद बिंदु का बिंदुपथ निकालिए।

Find the locus of the point of intersection of the perpendicular generators of the hyperbolic paraboloid $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$. 15

(c) लाग्रांज की अनिर्धारित गुणक विधि का प्रयोग करके फलन $u=x^2+y^2+z^2$ का चरम मान ज्ञात कीजिए, जो $2x+3y+5z=30$ शर्त द्वारा प्रतिबंधित है।

Find an extreme value of the function $u=x^2+y^2+z^2$, subject to the condition $2x+3y+5z=30$, by using Lagrange's method of undetermined multiplier. 20

खण्ड—B / SECTION—B

5. (a) निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$x\cos\left(\frac{y}{x}\right)(y\,dx+x\,dy)=y\sin\left(\frac{y}{x}\right)(x\,dy-y\,dx)$$

Solve the following differential equation :

$$x\cos\left(\frac{y}{x}\right)(y\,dx+x\,dy)=y\sin\left(\frac{y}{x}\right)(x\,dy-y\,dx)$$ 10

(b) वृत्त-कुल, जो बिंदु (0, 2) एवं (0, −2) से गुजरता है, का लंबकोणीय संछेदी ज्ञात कीजिए।

Find the orthogonal trajectories of the family of circles passing through the points (0, 2) and (0, −2). 10

(c) a, b, c के किस मान के लिए सदिश क्षेत्र

$$\overline{V}=(-4x-3y+az)\hat{i}+(bx+3y+5z)\hat{j}+(4x+cy+3z)\hat{k}$$

अघूर्णी है? तब $\overline{V}$ को अदिश फलन ϕ की प्रवणता के रूप में व्यक्त कीजिए। ϕ को ज्ञात कीजिए।

For what value of a, b, c is the vector field

$$\overline{V}=(-4x-3y+az)\hat{i}+(bx+3y+5z)\hat{j}+(4x+cy+3z)\hat{k}$$

irrotational? Hence, express $\overline{V}$ as the gradient of a scalar function ϕ. Determine ϕ. 10

(d) एक एकसमान छड़, जो ऊर्ध्वाधर दशा में है, अपने एक सिरे पर स्वतंत्र रूप से वर्तन कर सकती है तथा दूसरे सिरे पर लगाए गए एक क्षैतिज बल, जिसका मान छड़ के भार का आधा है, द्वारा ऊर्ध्वाधर से एक तरफ खींची जाती है। बताइए कि ऊर्ध्वाधर से किस कोण पर छड़ विश्राम करेगी।

A uniform rod, in vertical position, can turn freely about one of its ends and is pulled aside from the vertical by a horizontal force acting at the other end of the rod and equal to half its weight. At what inclination to the vertical will the rod rest? 10

(e) एक हल्की दृढ़ छड़ ABC से तीन कण, जिनमें से हरेक का द्रव्यमान m है, A, B तथा C पर बंधे हुए हैं। उस छड़ को बिंदु A से BC दूरी के बराबर स्थित बिंदु पर एक बल P के द्वारा लम्बवत् मारा जाता है। सिद्ध कीजिए कि पैदा हुई गतिज ऊर्जा का मान $\frac{1}{2}\frac{P^2}{m}\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}$ है, जहाँ $AB = a$ तथा $BC = b$.

A light rigid rod ABC has three particles each of mass m attached to it at A, B and C. The rod is struck by a blow P at right angles to it at a point distant from A equal to BC. Prove that the kinetic energy set up is $\frac{1}{2}\frac{P^2}{m}\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}$, where $AB = a$ and $BC = b$. 10

6. (a) प्राचल विचरण विधि का प्रयोग करके, निम्न अवकल समीकरण का हल निकालिए, यदि $y = e^{-x}$, पूरक फलन (CF) का एक हल है :

$$y'' + (1-\cot x)y' - y\cot x = \sin^2 x$$

Using the method of variation of parameters, solve the differential equation $y'' + (1-\cot x)y' - y\cot x = \sin^2 x$, if $y = e^{-x}$ is one solution of CF. 20

(b) दिए गए सदिश फलन $\overline{A}$, जहाँ $\overline{A} = (3x^2+6y)\hat{i} - 14yz\,\hat{j} + 20xz^2\,\hat{k}$, के लिए $\int_C \overline{A}\cdot d\overline{r}$ का मान निकालिए, जहाँ C बिंदु (0, 0, 0) से (1, 1, 1) तक निम्न पथों से निर्देशित है :

(i) $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$

(ii) सरल रेखा (0, 0, 0) से (1, 0, 0) तक जोड़ने पर, फिर (1, 1, 0) तक तथा फिर (1, 1, 1) तक

(iii) सरल रेखा (0, 0, 0) से (1, 1, 1) तक जोड़ने पर

क्या सभी स्थितियों में परिणाम समान हैं? कारण की व्याख्या कीजिए।

For the vector function $\overline{A}$, where $\overline{A} = (3x^2+6y)\hat{i} - 14yz\,\hat{j} + 20xz^2\,\hat{k}$, calculate $\int_C \overline{A}\cdot d\overline{r}$ from (0, 0, 0) to (1, 1, 1) along the following paths :

(i) $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$

(ii) Straight lines joining (0, 0, 0) to (1, 0, 0), then to (1, 1, 0) and then to (1, 1, 1)

(iii) Straight line joining (0, 0, 0) to (1, 1, 1)

Is the result same in all the cases? Explain the reason. 15

(c) एक दंड AD दो आलंब B एवं C पर विश्राम करता है, जबकि $AB = BC = CD$. यह पाया गया कि दंड झुक जाएगा यदि एक भार p kg, बिंदु A से लटकाया जाए या एक भार q kg, बिंदु D से लटकाया जाए। दंड का भार बताइए।

A beam AD rests on two supports B and C, where $AB = BC = CD$. It is found that the beam will tilt when a weight of p kg is hung from A or when a weight of q kg is hung from D. Find the weight of the beam. 15

7. *(a)* स्टोक्स प्रमेय को सत्यापित कीजिए, जबकि सदिश क्षेत्र $\bar{F} = xy\hat{i} + yz\hat{j} + xz\hat{k}$ एक सतह S पर है जो कि एक बेलन $z = 1 - x^2$, $0 \le x \le 1$, $-2 \le y \le 2$ का हिस्सा है, जहाँ S उपरिमुखी अभिविन्यस्त है।

Verify the Stokes' theorem for the vector field $\bar{F} = xy\hat{i} + yz\hat{j} + xz\hat{k}$ on the surface S which is the part of the cylinder $z = 1 - x^2$ for $0 \le x \le 1$, $-2 \le y \le 2$; S is oriented upwards. 20

(b) लाप्लास रूपांतरण का प्रयोग करके प्रारंभिक मान समस्या $ty'' + 2ty' + 2y = 2$; $y(0) = 1$ तथा $y'(0)$ स्वेच्छ है, को हल कीजिए। क्या इस प्रश्न का हल अद्वितीय है?

Using Laplace transform, solve the initial value problem $ty'' + 2ty' + 2y = 2$; $y(0) = 1$ and $y'(0)$ is arbitrary. Does this problem have a unique solution? 10

(c) *(i)* चार एकसमान भारी छड़, जो समान भार W की हैं, एक वर्ग के रूप में ढाँचा बनाते हुए जुड़ी हैं। यह एक कोने से टँगा हुआ है। भार W तीनों नीचे वाले हरेक कोने से लटकाए हैं। वर्ग का आकार एक हल्की छड़, जो क्षैतिज विकर्ण के अनुदिश है, द्वारा रक्षित किया गया है। उस हल्की छड़ पर प्रणोद निकालिए।

(ii) एक कण वेग V से लंबी दूरी तय करने के लिए चलना शुरू करता है। एक तारे के केंद्र से कण के प्रारंभिक पथ की स्पर्श-रेखा पर लंबवत् दूरी p है। दिखाइए कि कण की तारे के केंद्र से न्यूनतम दूरी λ है, जहाँ $V^2\lambda = \sqrt{\mu^2 + p^2V^4} - \mu$. यहाँ μ एक अचर है।

(i) A square framework formed of uniform heavy rods of equal weight W jointed together, is hung up by one corner. A weight W is suspended from each of the three lower corners, and the shape of the square is preserved by a light rod along the horizontal diagonal. Find the thrust of the light rod. 10

(ii) A particle starts at a great distance with velocity V. Let p be the length of the perpendicular from the centre of a star on the tangent to the initial path of the particle. Show that the least distance of the particle from the centre of the star is λ, where $V^2\lambda = \sqrt{\mu^2 + p^2V^4} - \mu$. Here μ is a constant. 10

8. *(a)* *(i)* निम्न अवकल समीकरण हल कीजिए :

$$(x+1)^2 y'' - 4(x+1)y' + 6y = 6(x+1)^2 + \sin\log(x+1)$$

(ii) अवकल समीकरण $9p^2(2-y)^2 = 4(3-y)$ के व्यापक व विचित्र हल निकालिए, जहाँ $p = \frac{dy}{dx}$.

(i) Solve the following differential equation :

$$(x+1)^2 y'' - 4(x+1)y' + 6y = 6(x+1)^2 + \sin\log(x+1)$$ 10

(ii) Find the general and singular solutions of the differential equation $9p^2(2-y)^2 = 4(3-y)$, where $p = \frac{dy}{dx}$. 10

(b) पृष्ठ समाकल $\iint_S \nabla \times \bar{F} \cdot \hat{n}\, dS$ का मान निकालिए, जहाँ $\bar{F} = y\hat{i} + (x - 2xz)\hat{j} - xy\hat{k}$ तथा S गोले $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ की सतह है, जो xy-तल के ऊपर है।

Evaluate the surface integral $\iint_S \nabla \times \bar{F} \cdot \hat{n}\, dS$ for $\bar{F} = y\hat{i} + (x - 2xz)\hat{j} - xy\hat{k}$ and S is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ above the xy-plane. 15

(c) एक चार पहियों वाला रेलवे ट्रक, जिसका कुल द्रव्यमान M है, के पहिए और धुरी के हर युग्म का द्रव्यमान व परिभ्रमण त्रिज्या क्रमशः m तथा k है। हर पहिए की त्रिज्या r है। यदि ट्रक को बल P द्वारा सीधे पथ (ट्रैक) पर धकेला जाता है, तब सिद्ध कीजिए कि उसका त्वरण $\dfrac{P}{M + \dfrac{2mk^2}{r^2}}$ है तथा ट्रक द्वारा प्रत्येक धुरी पर लगाए गए क्षैतिज बल का मान ज्ञात कीजिए। धुरी घर्षण व हवा का प्रतिरोध नगण्य है।

A four-wheeled railway truck has a total mass M, the mass and radius of gyration of each pair of wheels and axle are m and k respectively, and the radius of each wheel is r. Prove that if the truck is propelled along a level track by a force P, the acceleration is $\dfrac{P}{M + \dfrac{2mk^2}{r^2}}$, and find the horizontal force exerted on each axle by the truck. The axle friction and wind resistance are to be neglected. 15

★ ★ ★